ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2013
Môn : TOÁN; khối D

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.
b) Tìm m để đường thẳng y = -x +1 cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt.

Câu 2 (1,0 điểm) Giải phương trình $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$

Câu 3 (1,0 điểm) Giải phương trình $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{x} + 2)$

Câu 4 (1,0 điểm) Tính tích phân $\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$

Câu 5 (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $BAD = 120^0$, M là trung điểm cạnh BC và $SMA = 45^0$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

Câu 6 (1,0 điểm) Cho *x*, *y* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy \le y - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$.

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*) : *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có điểm $M\left(-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm H(-2; 4) và điểm I(-1; 1) lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm C.

Câu 8.a (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(-1; -1; -2), B(0;1;1) và mặt phẳng (P): x + y + z - 1 =0. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P). Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B và vuông góc với (P).

Câu 9.a (1,0 điểm) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)(z-i) + 2z = 2i$. Tính môđun của số phức $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ và đường thẳng $\Delta: y - 3 = 0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C), các đỉnh N và P thuộc Δ, đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm tọa độ điểm P.

Câu 8.b (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm A(-1; 3; -2) và mặt phẳng (P): x – 2y – 2z + 5 = 0. Tính khoảng cách từ A đến (P). Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với (P).

Câu 9.b (1,0 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x+1}$ trên đoạn [0; 2]

BÀI GIẢI

Câu 1:

a) m= 1, hàm số thành : y = $2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập xác định là R.

$y' = 6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$; $y(0) = 1$; $y(1) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

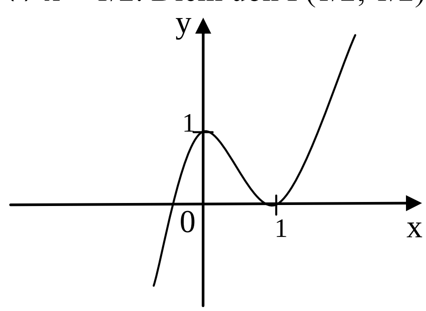
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	1 CĐ	↘	0 CT	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$; $(1; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên (0; 1)

Hàm số đạt cực đại tại x = 0; y(0) = 1; hàm số đạt cực tiểu tại x = 1; y(1) = 0

$y'' = 12x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$. Điểm uốn I (1/2; 1/2)

Đồ thị :



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$2x^3 - 3mx^2 + mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = 2x^2 - 3mx + m = 0 \ \ (1) \end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại 3 điểm $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 8m > 0 \\ g(0) = m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \vee m > \frac{8}{9}$$

Câu 2 : $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(2\sin x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ hay } \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ hay } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \ \ (k \in Z)$$

Câu 3 : Giải phương trình $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{x} + 2)$

Đk : 0 < x < 1

Pt $\Leftrightarrow x^2 = \left(1 - \sqrt{x}\right)\left[\left(1 - \sqrt{x}\right)^2 + 1\right]$ (*)

Đặt $t = 1 - \sqrt{x}$ (0< t < 1)

(*) thành $\left(1 - t\right)^4 = t\left(t^2 + 1\right) \Leftrightarrow t^4 - 5t^3 + 6t^2 - 5t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-5\left(t+\frac{1}{t}\right)+6=0 \quad (**)$$

Đặt $u=t+\frac{1}{t}\ \ (u>2)$

(**) thành $u^2-5u+4=0 \Leftrightarrow u=4$ (vì u>2)

Vậy $t+\frac{1}{t}=4 \Leftrightarrow t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow t=2-\sqrt{3}$ vì (0 < t < 1)

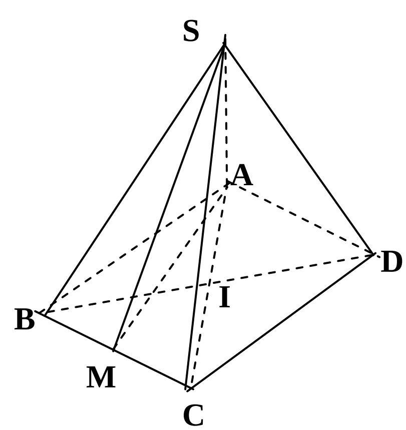
Nghĩa là $1-\sqrt{x}=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{3}-1 \Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}$

Câu 4 :

$$I=\int_0^1 \frac{x^2+1+2x}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{2xdx}{x^2+1}=1+\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=1+\ln 2$$

Câu 5

Tam giác ABC là tam giác đều, tam giác SMA vuông cân tại A



$$AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}=SA$$

$$V=\frac{1}{3}\left[a.a.\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{4}$$

Vì AD// BC nên

d(D, (SBC))= d(A, (SBC))= $\frac{1}{2}SM=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 6. $xy\le y-1 \Leftrightarrow \frac{x}{y}\le\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}=\frac{\frac{x}{y}+1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+3}}-\frac{\frac{x}{y}-2}{6\left(\frac{x}{y}+1\right)}$$

Đặt $t=\frac{x}{y}$, điều kiện $0<t\le\frac{1}{4}$

$$P=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$$

Xét $f\left(t\right)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$ với $0<t\le\frac{1}{4}$

$$f'(t)=\frac{-3t+7}{2\sqrt{\left(t^2-t+3\right)^3}}-\frac{1}{2\left(t+1\right)^2}$$

$$\forall t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]: \frac{-3t+7}{2\sqrt{\left(t^2-t+3\right)^3}}\ge\frac{8\sqrt{5}}{27}, \quad \frac{1}{2\left(t+1\right)^2}<\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f'(t) > 0 \quad \forall t \in \left(0;\frac{1}{4}\right] \Rightarrow f$ đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(t) \le f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$

Vậy $P_{\max} = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$ khi $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$

Câu 7a.

Đường thẳng AB đi qua M có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM} = -\frac{1}{2}(7;-1)$ nên có phương trình:

$7x - y + 33 = 0$.

Gọi B(b; 7b + 33). M là trung điểm AB $\Rightarrow$ tọa độ A : $\begin{cases} x_A = -9 - b \\ y_A = 3 - (7b+33) = -7b - 30 \end{cases}$

$\overrightarrow{AH} = (7+b; 34+7b) \perp \overrightarrow{BH} = (-2-b; -29-7b)$

$\Rightarrow b^2 + 9b + 20 = 0$

$\Rightarrow b = -5 \ \ hay \ \ b = -4$

<u>TH1</u> : b = -5: B(-5; -2) và A (-4; 5)

Phương trình AH là: $x + 2y - 6 = 0$. Gọi C (6 - 2c;c) $\in$ AH.

Do $IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow 5c^2 - 30c + 25 = 0 \Leftrightarrow c = 1 \vee c = 5$ (loại vì trùng với điểm A). Vậy C(4; 1)

<u>TH2</u> : b = -4 : B(-4; 5) và A (-5; -2)

Phương trình AH là: 2x – y + 8 = 0. Gọi C (c; 2c + 8) $\in$ AH.

Do $IA^2 = IC^2 \Leftrightarrow 5c^2 + 30c + 25 = 0 \Leftrightarrow c = -1 \vee c = -5$ (loại vì trùng với điểm B). Vậy C(-1; 6)

Do đó C (4; 1) hay C (-1; 6).

Câu 8a. Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với (P)

$\Rightarrow d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$

Gọi H là hình chiếu của A trên (P) $\Rightarrow H = d \cap (P) \Rightarrow H\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm thì (Q) đi qua A và có một vectơ pháp tuyến là

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (-1;2;-1)$

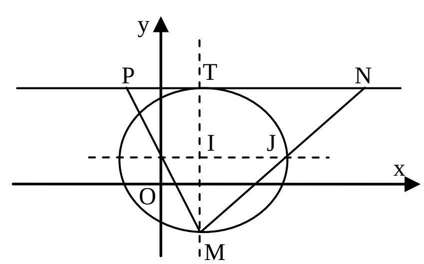
Vậy $(Q): x - 2y + z + 1 = 0$

Câu 9a. (1 + i)(z – i) + 2z = 2i

$\Leftrightarrow$ (3 + i)z = -1 + 3i $\Leftrightarrow z = \frac{-1+3i}{3+i} = i$ .Ta có: $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2} = \frac{-i - 2i + 1}{i^2} = -1 + 3i \Rightarrow |w| = \sqrt{10}$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b.



(C) có tâm I(1;1), R=2.

Do $d(I,\Delta) = R \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc (C) tại T

Do I là trực tâm tam giác PMN nên MI vuông góc Δ

$\Rightarrow x_M = x_I = 1$

Mà M thuộc (C) nên M(1; -1)

Gọi J là trung điểm MN suy ra IJ là đường trung bình của tam giác MTN

$\Rightarrow y_I = y_J = 1$

Mà J thuộc (C) nên J(3; 1) hay J(-1; 1)
Nếu J(3;1) thì N(5;3)

Gọi P(t;3) thuộc Δ. Ta có $\overrightarrow{NI} \perp \overrightarrow{MP} \Rightarrow t = -1 \Rightarrow P(-1;3)$

Nếu J(-1;1) thì N(-3;3)

Gọi P(t;3) thuộc Δ. Ta có $\overrightarrow{NI} \perp \overrightarrow{MP} \Rightarrow t = 3 \Rightarrow P(3;3)$

Câu 8b. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P): $d\left(A,\left(P\right)\right) = \dfrac{\left|-1-6+4+5\right|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{2}{3}$

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm

$\Rightarrow$ (Q) đi qua A và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(1;-2;-2\right)$ $\Rightarrow$ (Q): x – 2y – 2z +3 = 0.

Câu 9b. $f'(x) = \dfrac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay x = -3 (loại)

f(0) = 3, f(2) = 5/3, f(1) = 1

Vì f liên tục trên [0; 2] nên $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 3$ và $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 1$

Trần Minh Thịnh, Trần Văn Toàn, Lưu Nam Phát, Lê Ngô Thiện
(Trung tâm LTĐH Vĩnh Viễn – TP.HCM)